Statistische Physik & Thermodynamik

Probeklausur WS 19/20 – Prof. Dr. Haye Hinrichsen –

Musterlösungen

Diese Lösungsvorschläge sind für die endgültige Bewertung nicht verbindlich.

Aufgabe 1 Verständnisfragen (10×2 = 20 Punkte)

1. Was versteht man unter der charakteristischen Funktion einer Wahrscheinlichkeitsdichte? Unter welchen Voraussetzungen lässt sich darauf der Faltungssatz der Fouriertheorie anwenden?

   Die charakteristische Funktion ist (bis auf einen Vorfaktor) die Fouriertransformierte der Wahrscheinlichkeitsdichte:

   $$\phi_X(t) = \langle e^{itx} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, p_X(x)\, \mathrm{d}x.$$

   Der Faltungssatz in der Fouriertheorie besagt, dass ein Faltungsintegral durch Fouriertransformation in ein normales punktweises Produkt überführt wird. Übertragen auf Wahrscheinlichkeitsdichten ergibt sich, dass sich bei der Addition statistisch unabhängiger Zufallsgrößen die entsprechenden charakteristischen Funktionen multiplizieren:

   $$\phi_{X+Y}(t) \;=\; \left\langle e^{it(x+y)} \right\rangle \;=\; \left\langle e^{itx} e^{ity} \right\rangle \;=\; \left\langle e^{itx} \right\rangle \left\langle e^{ity} \right\rangle \;=\; \phi_X(t)\phi_Y(t)\,.$$

   1P für die richtige Definition und die Einsicht, dass es sich im wesentlichen um eine FT handelt. 1P für die Stichworte Faltungsprodukt, Addition unkorrelierter Zufallsgrößen und Multiplikativität der charakteristischen Funktion. Wichtig ist, die Voraussetzung der statistischen Unabhängigkeit zu erkennen. Halbe Punkte werden abgezogen, wenn Teile fehlen.

2. Was versteht man unter detaillierter Balance?

   Ein stationärer Zustand erfüllt die Bedingung der detaillierten Balance, wenn die Wahrscheinlichkeitsströme zwischen Paaren von Konfigurationen (Mikrozuständen) gleich sind, d.h.

   $$J_{s\to s'} = J_{s'\to s} \qquad \text{bzw.} \qquad P_s w_{s\to s'} = P_{s'} w_{s'\to s} \quad \forall s, s' \in \Omega$$

   Alternative Antwort: Das Produkt der Vorwärtsraten entlang eines geschlossenen Wegs im Konfigurationsraum muss gleich dem Produkt der Rückwärtsraten sein.

   Bewertung: 1P für die Assoziation mit einem stationären Gleichgewichtszustand, 1P für die konkrete Formel. Halber Punkt Abzug, wenn es bei einer qualitativen Beschreibung bleibt.

3. Welche Form nimmt die Fermi-Dirac-Verteilung im Limes $T \to 0$ an? Wie nennt man in diesem Fall das chemische Potential und welche Bedeutung hat es dann?

Für $T \to 0$ werden die unteren Einteilchenenergieniveaus $r = 1 \ldots N$ sukzessive einfach besetzt (1P):

$$n_r = \begin{cases} 1 & \text{falls } r \leq N \\ 0 & \text{falls } r > N \end{cases} .$$

Wie man durch Bildung des Grenzwerts leicht überprüfen kann, muss dazu $\epsilon_N < \mu < \epsilon_{N+1}$ sein. μ wird in diesem Fall als Fermienergie (Fermikante) bezeichnet. (1P)

4. Ein ideales Gas wird isobar vom Volumen V_1 auf das Volumen $V_2 > V_1$ expandiert. Berechne ΔT, ΔW, ΔE und ΔH.

   Da $p = const$ ist, folgt aus der ersten Zustandsgleichung $pV = Nk_BT$ die Relation

$$\Delta T = \frac{p}{Nk_B}\Delta V.$$

   Da p konstant ist, ist die am System geleistete Arbeit durch $\Delta W = -p\Delta V$ gegeben. Sie ist negativ, da das System selbst Arbeit leistet. Für die Änderung der inneren Energie benutzt man die zweite Zustandsgleichung $E = \frac{3}{2}Nk_BT = const$ und erhält

$$\Delta E = \frac{3}{2}Nk_B\Delta T = \frac{3p}{2}\Delta V.$$

   Für die Entropieänderung muss man zunächst die zufließende Wärmemenge bestimmen:

$$\Delta Q = \Delta E - \Delta W = \frac{3p}{2}\Delta V + p\Delta V = \frac{5p}{2}\Delta V.$$

   Nach Clausius ist $\mathrm{d}H = \frac{1}{T}\,đQ$, man hat also

$$\Delta H = Hk_B \ln\frac{V_2}{V_1} + \frac{3}{2}Nk_B\ln\frac{E_2}{E_1} = \frac{5Nk_B}{2}\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

   Bewertung: 0.5P für jede korrekte Größe

5. Welche Aussage macht das Gibbssche Postulat?

   Das Gibbs'sche Postulat besagt, dass in einem isolierten System im Gleichgewichtszustand alle Konfigurationen (Mikrozustände) gleich wahrscheinlich sind.
   1P für Voraussetzung, 1P für die Aussage.

6. Eine auf $\mathbb{R}_+^2$ definierte Wahrscheinlichkeitsdichte $p(a,b)$ mit $a, b > 0$ soll auf die neuen Koordinaten $x := \frac{1}{ab}$ und $y := a/b$ umtransformiert werden. Wie lautet die transformierte Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x,y)$?

   Man muss hier das zweidimensionale Transformationsgesetz $p(x,y) = p(a,b)/|\mathrm{det}J|$ benutzen, wobei J die Jacobi-Matrix ist:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a^2b} & -\frac{1}{ab^2} \\ \frac{1}{b} & -\frac{a}{b^2} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{det}J = \frac{2}{ab^3}$$

   Damit ist $p(x,y) = \frac{ab^3}{2}p(a,b)$.

   1P für das korrekte Transformationsgesetz, 1P für das fehlerfreie Ausrechnen

7. Welche mathematische Tatsache liegt den Maxwell-Relationen zugrunde? Demonstrieren Sie die Konstruktion einer Maxwell-Relation am Beispiel der Helmholtzschen freien Energie.

   Den Maxwellrelationen liegt die mathematische Tatsache zugrunde, dass die gemischten zweiten Ableitungen angewandt auf ein thermodynamisches Potential vertauschen. (1P) Beispiel: Wir betrachten das Potential $F(T, V)$. Dann ist

$$\mathrm{d}F = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V = -H\,\mathrm{d}T - p\,\mathrm{d}V\,.$$

   Die dazugehörige Maxwellrelation ergibt sich aus (1P)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T} \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

8. Eine kontinuierliche Zufallsgröße X mit der momenterzeugenden Funktion $m_X(t)$ wird auf die Zufallsgröße $Y = aX + b$ linear abgebildet. Wie lautet $m_Y(t)$?

   Die momenterzeugende Funktion von X ist definiert als (1P)

$$m_X(t) = \langle e^{tx} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} p(x)\,\mathrm{d}x$$

   Mit dem Ansatz $p(x)\,\mathrm{d}x = p(y)\,\mathrm{d}y$ ergibt sich die Transformation (1P)

$$m_Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ty}\,p(y)\ \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t(ax+b)} p(x)\,\mathrm{d}x = e^{tb} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{atx} p(x)\,\mathrm{d}x = e^{tb} m_X(at)$$

9. Sei X eine kontinuierliche Zufallsgröße mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $p_X(x) = e^{-x}$ auf $x \in \mathbb{R}^+$. Diese werde durch die Funktion $z(x) = \ln x$ auf die Zufallsgröße Z abgebildet. Berechne $p_Z(z)$.

   Es gilt die Umrechnungsformel (1P)

$$p_Z(z) = \frac{p_X(x(z))}{|z'(x(z))|}\,.$$

   Mit $z'(x) = 1/x$ und $x(z) = e^z$ erhält man die (korrekt normierte) Wahrscheinlichkeitsdichte (1P)

$$p_Z(z) = e^z e^{-e^z} = \exp(z - e^z)\,. \qquad z \in \mathbb{R}$$

10. Ein System mit zwei Konfigurationen mit den Energien $\epsilon_1 = 0$ und $\epsilon_2 = \epsilon$ befindet sich in einem Wärmebad mit der Temperatur T. Wie groß ist seine mittlere Energie?

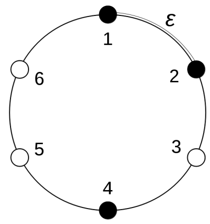
    Die Besetzungswahrscheinlichkeiten sind $p_1 = 1/Z$ und $p_2 = e^{-\beta\epsilon}/Z$, wobei $Z = 1 + e^{-\beta\epsilon}$ die Zustandssumme ist. Die mittlere Energie lautet $\langle E \rangle = p_1\epsilon_1 + p_2\epsilon_2$, also

$$\langle E \rangle = \frac{\epsilon e^{-\beta\epsilon}}{1 + e^{-\beta\epsilon}} = \frac{\epsilon}{e^{\beta\epsilon} + 1}.$$

$\Rightarrow$ BITTE WENDEN

Aufgabe 2 Diffundierende Teilchen auf einem Ring (10P)

Auf einem Ring mit 6 Plätzen befinden sich $N = 3$ ununterscheidbare Teilchen, die hin und her springen. Dabei darf sich an jedem Platz höchstens ein Teilchen aufhalten. Wenn sich zwei Teilchen an benachbarten Plätzen befinden, erhöht das die Energie der Konfiguration um ϵ, so besitzt z.B. die Konfiguration in der nebenstehenden Abbildung die Gesamtenergie $E = \epsilon$. Der gesamte Ring befinde sich in einem Wärmebad mit der Temperatur T.



(a) Charakterisieren Sie die möglichen Konfigurationen $s = \{s_1, \ldots, s_6\}$, die zugeordneten Energien und deren Entartungen. (1P)

(b) Berechnen Sie die Zustandssumme Z. (1P)

(c) Demonstrieren Sie, wie die mittlere Gesamtenergie $\langle E \rangle$ und die Dispersion $\langle (\Delta E)^2 \rangle$ mit Hilfe partieller Ableitungen von $\ln Z$ ausgedrückt werden kann. (2P)

(d) Berechnen Sie $\langle E \rangle$ und die Dispersion $\langle (\Delta E)^2 \rangle$ explizit. Welche Grenzwerte ergeben sich für $T \to 0$ and $T \to \infty$? (2P)

(e) Wie groß ist die Wärmekapazität $C = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T}$ des Systems? (1P)

(f) Bestimmen Sie die Nachbarkorrelation $c = \langle s_i s_{i+1} \rangle$, also die Wahrscheinlichkeit, dass zwei benachbarte Plätze gleichzeitig besetzt sind. (1P)

(g) Bestimmen Sie den zusammenhängenden Anteil $c^{conn.}$ der in (e) bestimmten Nachbarkorrelation. Im Limes $T \to \infty$ ergibt sich $c^{conn.} = -\frac{1}{20}$. Wie erklären Sie sich dieses Ergebnis? (2P)

Lösungsvorschlag

(a) Es gibt $\binom{6}{3} = 20$ mögliche Konfigurationen, die sich wegen der Translationsinvarianz in vier Typen einteilen lassen, die wir hier mit a, b, c, d bezeichnen:

Typ	Konfiguration	Entartung	Energie
a	000111	6	$E_a = 2\epsilon$
b	001011	6	$E_b = \epsilon$
c	010011	6	$E_c = \epsilon$
d	010101	2	$E_d = 0$

(b) Aus obiger Tabelle ergibt sich sofort:

$$Z(\beta) \;=\; \sum_s e^{-\beta E_s} \;=\; 6e^{-2\beta\epsilon} + 12e^{-\beta\epsilon} + 2\,.$$

1P auch dann geben, wenn die Tabelle in (a) nicht korrekt war, aber die Umsetzung in die Zustandssumme korrekt vorgenommen wurde.

(c) Erwartungswertbildung durch partielles Differenzieren sollten alle Teilnehmer können:

$$\langle E \rangle \;=\; \frac{\sum_s E_s\, e^{-\beta E_s}}{\sum_s \; e^{-\beta E_s}} = \frac{-\frac{\partial}{\partial \beta} Z(\beta)}{Z} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$$

$$\langle(\Delta E)^2\rangle = \langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2 = \frac{\sum_s E_s^2\, e^{-\beta E_s}}{\sum_s \ e^{-\beta E_s}} - \langle E\rangle^2 = \frac{\frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2}}{Z} - \frac{\left(\frac{\partial Z}{\partial \beta}\right)^2}{Z^2} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\frac{\partial Z}{\partial \beta}}{Z}\right) = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\ln Z$$

1P falls die grundsätzliche Methode, einen Erwartungswert durch partielle Ableitung auszudrücken, verstanden und umgesetzt wurde. 1P für die korrekte Berechnung.

(d) Durch Differenzieren der Zustandssumme erhält man

$$\langle E\rangle = \frac{6\epsilon\left(e^{\beta\epsilon}+1\right)}{6e^{\beta\epsilon}+e^{2\beta\epsilon}+3}\,, \qquad \langle(\Delta E)^2\rangle = \frac{6\epsilon^2 e^{\beta\epsilon}\left(2e^{\beta\epsilon}+e^{2\beta\epsilon}+3\right)}{\left(6e^{\beta\epsilon}+e^{2\beta\epsilon}+3\right)^2}$$

Für $T=0$ ($\beta=\infty$) erhält man $\langle E\rangle = 0$ und $\langle(\Delta E)^2\rangle = 0$,
für $T\to\infty$ ($\beta\to 0$) dagegen $\langle E\rangle = \frac{6\epsilon}{5}$ und $\langle(\Delta E)^2\rangle = \frac{9\epsilon^2}{25}$.
1P für das korrekte Differenzieren, 1P für das Ausführen der Grenzprozesse.

(e) Die Rechnung ist einfach, wenn man sich zunutze macht, dass die Wärmekapazität mit den Energiefluktuationen verknüpft ist:

$$C = \frac{\partial\langle E\rangle}{\partial T} = -\beta^2\frac{\partial\langle E\rangle}{\partial\beta} = \beta^2\frac{\partial^2\ln Z}{\partial\beta^2} = \beta^2\langle(\Delta E)^2\rangle = \beta^2\frac{6\epsilon^2 e^{\beta\epsilon}\left(2e^{\beta\epsilon}+e^{2\beta\epsilon}+3\right)}{\left(6e^{\beta\epsilon}+e^{2\beta\epsilon}+3\right)^2}$$

(f) Es gibt zwei Konfigurationen vom Typ a, jeweils eine vom Typ b und c sowie keine vom Typ d, bei denen zwei fest vorgegebene benachbarte Gitterplätze gleichzeitig besetzt sind. Damit ergibt sich sofort

$$c(\beta) = \frac{2e^{-2\beta\epsilon}+2e^{-\beta\epsilon}}{Z(\beta)}$$

(g) Der zusammenhängende Anteil einer Nachbarkorrelation ist definiert als $c^{conn.} = \langle s_i s_{i+1}\rangle - \langle s_i\rangle\langle s_{i+1}\rangle$. Wegen der Translationsinvarianz ist $\langle s_i\rangle = \langle s_{i+1}\rangle = 1/2$. Folglich ist

$$c^{conn.} = c - \frac{1}{4}\,.$$

Im Limes $T\to\infty$, also $\beta\to 0$ ist $Z(0)=20$ und deshalb $c=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$. Der zusammenhängende Anteil ist in diesem Limes also $c^{conn.} = \frac{1}{5}-\frac{1}{4} = -\frac{1}{20} < 0$. Der negative nichtverschwindende Wert bedeutet, dass die Teilchen antikorreliert sind, seblst im total ungeordneten Limes unendlich hoher Temperatur. Das ist eine einfache Konsequenz der Teilchenzahlerhaltung: Wenn ein Platz besetzt ist, wird dadurch bereits die zu erwartende Wahrscheinlichkeit, auf dem Nachbarplatz ein Teilchen anzutreffen, von $\frac{3}{6}$ auf $\frac{2}{5}$ reduziert.
1P für den korrekten Ansatz und die korrekte Berechnung. 1P für die Erkenntnis, dass Teilchenzahlerhaltung zu (Anti-)korrelationseffekten führt.

Aufgabe 3 Legendre-Transformation (10P)

Die Legendre-Transformation einer konvexen stetig differenzierbaren Funktion $f(x)$ ist definiert als

$$f^*(m) = x(m)m - f\big(x(m)\big)\,,$$

wobei $x(m) = [f']^{-1}(m)$ die Umkehrfunktion zu $m(x) = f'(x)$ ist.

(a) Beweisen Sie, dass

$$f^*(m) = \sup_x \Big[xm - f(x)\Big]$$

eine äquivalente Definition der Legendre-Transformation ist. Zeigen Sie dazu insbesondere auch, dass das Supremum existiert und eindeutig ist. (3P)

(b) Man zeige, dass die Legendre-Transformation eine Involution ist, d.h. $f^{**} = f$. Zeigen Sie ferner, dass der Definitionsbereich von f^* durch die asymptotischen Steigungen $f'(x)$ an den Rändern des Definitionsbereichs von f beschränkt ist. (2P)

(c) Überprüfen Sie den Definitionsbereich und berechnen Sie die Legendre-Transformation von $f(x) = \frac{1}{k}x^k$ mit $k \in 2\mathbb{N}$. (3P)

(d) Überprüfen Sie den Definitionsbereich und berechnen Sie die Legendre-Transformation von $f(x) = \exp(x-1)$ (2P).

Lösungsvorschlag

(a) Wenn $f(x)$ auf dem Definitionsbereich $[a,b]$ konvex ist, dann ist $-f(x)$ konkav und $xm - f(x)$ ebenfalls konkav, denn die Addition einer linearen Funktion ändert die Krümmung nicht. Eine konkave stetig differenzierbare Funktion besitzt ein eindeutiges Supremum, wenn $m - f'(a)$ und $m - f'(b)$ ein unterschiedliches Vorzeichen haben. Das bedeutet, dass der Definitionsbereich der Legendre-Transformierten durch $m \in [f'(a), f'(b)]$ gegeben ist. (1P)

Wenn ein eindeutiges Supremum existiert, dann gilt

$$\sup_x \Big[F(x)\Big] = F(x_0) \qquad \text{wobei } F'(x_0) = 0 \text{ ist.}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sup_x \Big[xm - f(x)\Big] = x_0 m - f(x_0) \qquad \text{wobei } m - f'(x_0) = 0 \text{ ist.}$$

Also befindet sich das Supremum bei $x_0 = [f']^{-1}(m)$. Die Konvexität von f stellt sicher, dass die Umkehrfunktion der Ableitung existiert. (2P)

$$\Leftrightarrow \quad \sup_x \Big[xm - f(x)\Big] = f^*(m)$$

(b) Durch Hintereinanderausführung ergibt sich:

$$f^*(m) = x(m)m - f\big(x(m)\big)$$

$$\Rightarrow f^{**}(z) \;=\; m(z)z - f^*\big(m(z)\big)$$

$$\Rightarrow f^{**}(z) = m(z)z - \underbrace{x\big(m(z)\big)}_{=z} m(z) + f\Big(\underbrace{x\big(m(z)\big)}_{=z}\Big) \;=\; f(z)$$

(c) Für $k \in 2\mathbb{N}$ ist $f(x) = \frac{1}{k}x^k$ konvex und besitzt die asymptotischen Steigungen $\pm\infty$. Deshalb ist f^* auf ganz $m \in \mathbb{R}$ erklärt. Bei der Bildung der Umkehrfunktion von $m(x) = x^{k-1}$ ist Vorsicht angebracht: Die Wurzeln haben verschiedene Lösungen, von denen die reelle auswählen ist:

$$x(m) = \begin{cases} m^{1/(1+k)} & m \geq 0 \\ -(-m)^{1/(1+k)} & m < 0 \end{cases}.$$

Man erhält

$$f^*(m) = \frac{(k-1)|m|^{\frac{k}{k-1}}}{k}$$

(d) $f(x) = \exp(x-1)$ ist konvex und die asymptotischen Steigungen sind 0 und $+\infty$. Die Legendre-Transformierte wird also nur auf $m \in \mathbb{R}^+$ definiert sind. In der Tat erhält man durch Rechnung:

$$f^*(m) = m \ln m$$

Aufgabe 4 Momente und Kumulanten (10P)

Die sogenannte *Erlang-Verteilung* ist eine kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsdichte, die durch

$$p_{n,\lambda}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

gegeben ist. Sie hängt von einem reellen Parameter $\lambda > 0$ und einem ganzzahligen Parameter $n = 1, 2, \ldots$ ab.

(a) Wie sind die momenterzeugende Funktion $M_{n,\lambda}(t)$ und die kumulantenerzeugende Funktion $K_{n,\lambda}(t)$ dieser Wahrscheinlichkeitsdichte definiert? (1P)

(b) Berechnen Sie die momenterzeugende Funktion $M_{1,\lambda}(t)$ für den Spezialfall $n = 1$ unter der Annahme, dass $t < \lambda$ ist. (1P)

(c) Finden und lösen Sie eine Rekursionsrelation $M_{n,\lambda} \to M_{n-1,\lambda}$ und lösen Sie diese, um zu zeigen, dass die momenterzeugende Funktion für $t < \lambda$ durch $M_{n,\lambda}(t) = \lambda^n/(\lambda - t)^n$ gegeben ist. (3P)

(d) Drücken Sie die Ableitung $M'_{n,\lambda}(t)$ in $M_{n+1,\lambda}(t)$ aus. (1P)

(e) Benutzen Sie (d), um einen allgemeinen Asudruck für das k-te Moment m_k abzuleiten. (2P)

(f) Berechnen Sie einen allgemeinen Ausdruck für die k-te Kumulante κ_k. (2P)

Lösungsvorschlag

(a) Die momenterzeugende und die kumulantenerzeugende Funktion sind definiert als

$$M_{n,\lambda}(t) = \langle e^{tx} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} p_{n,\lambda}(x)\, \mathrm{d}x\,, \qquad K_{n,\lambda}(t) = \ln M_{n,\lambda}(t)$$

(b) Das Integral lautet

$$M_{1,\lambda}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} p_{1,\lambda}(x)\, \mathrm{d}x = \lambda \int_0^{\infty} e^{(t-\lambda)x}\, \mathrm{d}x = \frac{\lambda}{t-\lambda} e^{(t-\lambda)x}\Big|_0^{\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - t}.$$

Dabei haben wir im letzten Schritt benutzt, dass $t < \lambda$ ist, so dass nur die untere Grenze beiträgt.

(c) Um die Rekusionsrelation zu erhalten, integrieren wir partiell:

$$
\begin{aligned}
M_{n,\lambda}(t) &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^\infty x^{n-1}e^{(t-\lambda)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\cdot\frac{x^{n-1}}{t-\lambda}\,e^{(t-\lambda)x}\Big|_0^\infty}_{=0-0=0 \text{ falls } t<\lambda} - \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^\infty \frac{(n-2)x^{n-2}}{t-\lambda}\,e^{(t-\lambda)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\lambda}{\lambda-t}\,\frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!}\int_0^\infty x^{n-2}e^{(t-\lambda)x}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{\lambda}{\lambda-t}\,M_{n-1,\lambda}(t)
\end{aligned}
$$

Zusammen mit der Verankerung der Rekursion in Teil (b) ergibt sich sofort:

$$M_{n,\lambda}(t) \;=\; \Big(\frac{\lambda}{\lambda-t}\Big)^n$$

(d) Eine direkte Berechnung der Ableitung ergibt sofort:

$$M'_{n,\lambda}(t) = \frac{n}{\lambda}\,M_{n+1,\lambda}(t)$$

(e) Für die k-te Ableitung gilt durch wiederholte Anwendung von (d):

$$M^{(k)}_{n,\lambda}(t) = \underbrace{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}_{=(n+k-1)!/(n-1)!}\,\lambda^{-k}M_{n-k,\lambda}(t)$$

Wegen $M(0)=1$ folgt daraus für die Momente

$$m_k = \frac{\partial^k M_{n,\lambda}}{\partial t^k}\Big|_{t=0} \;=\; \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,\lambda^k}$$

(f) Die kumulantenerzeugende Funktion lautet

$$K_{n,\lambda}(t) = \ln M_{n,\lambda}(t) = n\ln\lambda - n\ln(\lambda-t).$$

Die k-te Ableitung dieser Funktion lautet

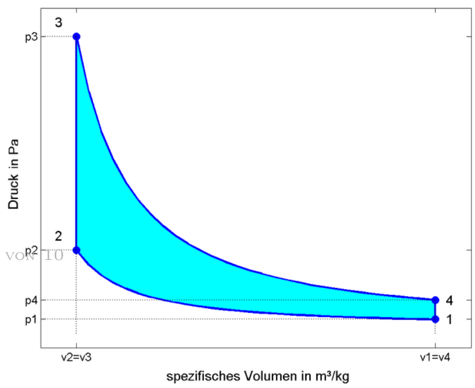
$$K^{(k)}_{n,\lambda} = \frac{(k-1)!}{(\lambda-t)^k}.$$

Folglich sind die Kumulanten gegeben durch

$$\kappa_0 = 0\,,\qquad \kappa_k = \frac{\partial^k K_{n,\lambda}(t)}{\partial t^k}\Big|_{t=0}\,\frac{(k-1)!}{\lambda^k}.$$

Aufgabe 5 Ottomotor (10P)

Ein Ottomotor wird durch den rechts gezeigten thermodynamischen Kreisprozess beschrieben. Dabei wollen wir annehmen, dass der Motor mit einem idealen Gas betrieben wird.



(a) Welche Art von Zustandsänderungen finden in den vier Abschnitten des Kreisprozesses statt? (2P)

(b) Bestimmen Sie für jeden Teilschritt die zugeführten und abgeführten Wärmemengen. (2P)

(c) Berechnen Sie den Wirkungsgrad in Abhängigkeit von den Temperaturen an den Eckpunkten. (2P)

(d) Welche maximale und minimale Temperatur T_{max} und T_{min} wird im Kreisprozess erreicht? (2P)

(e) Vergleichen Sie den berechneten Wirkungsgrad mit dem eines Carnot-Prozesses, der zwischen T_{max} und T_{min} betrieben wird. (2P)

LÖSUNGSVORSCHLAG

(a) 1-2 Adiabatische Kompression mit $\Delta W > 0$.
2-3 Isochore Verbrennung (Erhitzung) mit $\Delta W = 0$.
3-4 Adiabatische Expansion mit $\Delta W < 0$.
4-1 Isochore Abkühlung mit $\Delta W = 0$. (je 0.5 P)

(b) 1-2 Während der adiabatischen Kompression gilt

$$\Delta Q = 0\,, \qquad \Delta W > 0\,, \qquad \Delta W = -\int_{V_1}^{V_2} p(V)\,\mathrm{d}V\,,$$

wobei $p(V)V^\kappa = const$ und $TV^{\kappa-1} = const$ mit $\kappa = \frac{5}{3}$ gilt. Daraus folgt

$$\Delta W = -p_1 V_1^\kappa \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V^\kappa}\,\mathrm{d}V = \frac{p_1}{\kappa-1}\left(\frac{V_1^\kappa}{V_2^{\kappa-1}} - V_1\right) = \frac{1}{\kappa-1}(p_2V_2 - p_1V_1)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta W = \frac{p_2V_2}{\kappa-1}\left(1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1}\right) > 0$$

2-3 Für die isochore Verbrennung gilt $\Delta W = 0$ mit $E = \frac{3}{2}pV$, also

$$\Delta Q = \frac{3}{2}V_2\Delta p \;=\; \frac{3}{2}V_2(p_3 - p_2) > 0$$

3-4 Analog zu [1-2] erhalten wir $\Delta Q = 0$ und

$$\Delta W = \frac{1}{\kappa-1}(p_4V_1 - p_3V_2).$$

4-1 Analog zu [2-3] gilt $\Delta Q = \frac{3}{2}V_1(p_1 - p_4) < 0$. Es wird also Wärme vom Motor abgegeben.

(c) Den Wirkungsgrad berechnet man wie folgt:

$$\eta_{Otto} = \frac{-\Delta W}{\Delta Q_{zu}} = \frac{V_2(p_3-p_2)(1-(V_2/V_1)^{\kappa-1})}{(\kappa-1)\frac{3}{2}(P_3-P_2)V_2} = 1-\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1} = 1-\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = 1-\frac{T_4}{T_3}\,,$$

wobei wir $\kappa = \frac{5}{3}$ benutzt haben.

(d) Die minimale und maximale Temperatur lauten:

$$T_{max} = T_3, \quad T_{min} = T_1$$

(e) Bei Carnot wird der Wirkungsgrad $\eta_c = 1 - \frac{T_{max}}{T_{min}} > \eta_{Otto}$ erzielt.
