Statistische Physik & Thermodynamik

Probeklausur WS 19/20 – Prof. Dr. Haye Hinrichsen –

Zugelassene Hilfsmittel: Schreibzeug sowie ein einfacher nichtprogrammierbarer Taschenrechner. Papier wird gestellt. Erlaubt ist eine **eigenhändig verfasste handschriftliche Zusammenfassung** (max. 10 DIN A4-Seiten einseitig). Diese Zusammenfassung ist am Ende an die Klausur anzuheften und mit abzugeben. Bitte Ausweis auf den Tisch legen. **Die Benutzung elektronischer Geräte (Handys, Smartwatches,...) ist untersagt,** Geräte komplett ausschalten.

Am Ende der Klausur bitte **alle** Aufgaben (auch nicht bearbeitete) **der Reihe nach geordnet** (1,2,3,...) gefolgt von der benutzten schriftlichen Zusammenfassung zusammentackern und abgeben. Bearbeitungsdauer: 120 Minuten.

Aufgabe 1 Verständnisfragen (10×2 = 20 Punkte)

1. Was versteht man unter der charakteristischen Funktion einer Wahrscheinlichkeitsdichte? Unter welchen Voraussetzungen lässt sich darauf der Faltungssatz der Fouriertheorie anwenden?

2. Was versteht man unter detaillierter Balance?

3. Welche Form nimmt die Fermi-Dirac-Verteilung im Limes $T \to 0$ an? Wie nennt man in diesem Fall das chemische Potential und welche Bedeutung hat es dann?

4. Ein ideales Gas wird isobar vom Volumen V_1 auf das Volumen $V_2 > V_1$ expandiert. Berechne ΔT, ΔW, ΔE und ΔH.

5. Welche Aussage macht das Gibbssche Postulat?

6. Eine auf $\mathbb{R}_+^2$ definierte Wahrscheinlichkeitsdichte $p(a, b)$ mit $a, b > 0$ soll auf die neuen Koordinaten $x := \frac{1}{ab}$ und $y := a/b$ umtransformiert werden. Wie lautet die transformierte Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x, y)$?

7. Welche mathematische Tatsache liegt den Maxwell-Relationen zugrunde? Demonstrieren Sie die Konstruktion einer Maxwell-Relation am Beispiel der Helmholtzschen freien Energie.

8. Eine kontinuierliche Zufallsgröße X mit der momenterzeugenden Funktion $m_X(t)$ wird auf die Zufallsgröße $Y = aX + b$ linear abgebildet. Wie lautet $m_Y(t)$?

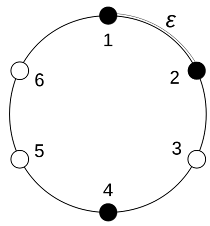
9. Sei X eine kontinuierliche Zufallsgröße mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $p_X(x) = e^{-x}$ auf $x \in \mathbb{R}^+$. Diese werde durch die Funktion $z(x) = \ln x$ auf die Zufallsgröße Z abgebildet. Berechne $p_Z(z)$.

10. Ein System mit zwei Konfigurationen mit den Energien $\epsilon_1 = 0$ und $\epsilon_2 = \epsilon$ befindet sich in einem Wärmebad mit der Temperatur T. Wie groß ist seine mittlere Energie?

⇒ **Bitte wenden**

Aufgabe 2 Diffundierende Teilchen auf einem Ring (10P)

Auf einem Ring mit 6 Plätzen befinden sich $N = 3$ ununterscheidbare Teilchen, die hin und her springen. Dabei darf sich an jedem Platz höchstens ein Teilchen aufhalten. Wenn sich zwei Teilchen an benachbarten Plätzen befinden, erhöht das die Energie der Konfiguration um ϵ, so besitzt z.B. die Konfiguration in der nebenstehenden Abbildung die Gesamtenergie $E = \epsilon$. Der gesamte Ring befinde sich in einem Wärmebad mit der Temperatur T.



(a) Charakterisieren Sie die möglichen Konfigurationen $s = \{s_1, \ldots, s_6\}$, die zugeordneten Energien und deren Entartungen. (1P)

(b) Berechnen Sie die Zustandssumme Z. (1P)

(c) Demonstrieren Sie, wie die mittlere Gesamtenergie $\langle E\rangle$ und die Dispersion $\langle(\Delta E)^2\rangle$ mit Hilfe partieller Ableitungen von $\ln Z$ ausgedrückt werden kann. (2P)

(d) Berechnen Sie $\langle E\rangle$ und die Dispersion $\langle(\Delta E)^2\rangle$ explizit. Welche Grenzwerte ergeben sich für $T \to 0$ and $T \to \infty$? (2P)

(e) Wie groß ist die Wärmekapazität $C = \frac{\partial\langle E\rangle}{\partial T}$ des Systems? (1P)

(f) Bestimmen Sie die Nachbarkorrelation $c = \langle s_i s_{i+1}\rangle$, also die Wahrscheinlichkeit, dass zwei benachbarte Plätze gleichzeitig besetzt sind. (1P)

(g) Bestimmen Sie den zusammenhängenden Anteil $c^{conn.}$ der in (e) bestimmten Nachbarkorrelation. Im Limes $T \to \infty$ ergibt sich $c^{conn.} = -\frac{1}{20}$. Wie erklären Sie sich dieses Ergebnis? (2P)

Aufgabe 3 Legendre-Transformation (10P)

Die Legendre-Transformation einer konvexen stetig differenzierbaren Funktion $f(x)$ ist definiert als

$$f^*(m) = x(m)m - f\big(x(m)\big)\,,$$

wobei $x(m) = [f']^{-1}(m)$ die Umkehrfunktion zu $m(x) = f'(x)$ ist.

(a) Beweisen Sie, dass

$$f^*(m) = \sup_x \Big[xm - f(x)\Big]$$

eine äquivalente Definition der Legendre-Transformation ist. Zeigen Sie dazu insbesondere auch, dass das Supremum existiert und eindeutig ist. (3P)

(b) Man zeige, dass die Legendre-Transformation eine Involution ist, d.h. $f^{**} = f$. Zeigen Sie ferner, dass der Definitionsbereich von f^* durch die asymptotischen Steigungen $f'(x)$ an den Rändern des Definitionsbereichs von f beschränkt ist. (2P)

(c) Überprüfen Sie den Definitionsbereich und berechnen Sie die Legendre-Transformation von $f(x) = \frac{1}{k}x^k$ mit $k \in 2\mathbb{N}$. (3P)

(d) Überprüfen Sie den Definitionsbereich und berechnen Sie die Legendre-Transformation von $f(x) = \exp(x-1)$ (2P).

Aufgabe 4 Momente und Kumulanten (10P)

Die sogenannte *Erlang-Verteilung* ist eine kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsdichte, die durch

$$p_{n,\lambda}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

gegeben ist. Sie hängt von einem reellen Parameter $\lambda > 0$ und einem ganzzahligen Parameter $n = 1, 2, \ldots$ ab.

(a) Wie sind die momenterzeugende Funktion $M_{n,\lambda}(t)$ und die kumulantenerzeugende Funktion $K_{n,\lambda}(t)$ dieser Wahrscheinlichkeitsdichte definiert? (1P)

(b) Berechnen Sie die momenterzeugende Funktion $M_{1,\lambda}(t)$ für den Spezialfall $n = 1$ unter der Annahme, dass $t < \lambda$ ist. (1P)

(c) Finden und lösen Sie eine Rekursionsrelation $M_{n,\lambda} \to M_{n-1,\lambda}$ und lösen Sie diese, um zu zeigen, dass die momenterzeugende Funktion für $t < \lambda$ durch $M_{n,\lambda}(t) = \lambda^n/(\lambda - t)^n$ gegeben ist. (3P)

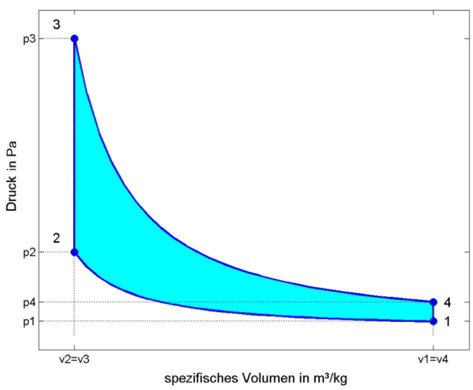
(d) Drücken Sie die Ableitung $M'_{n,\lambda}(t)$ in $M_{n+1,\lambda}(t)$ aus. (1P)

(e) Benutzen Sie (d), um einen allgemeinen Asudruck für das k-te Moment m_k abzuleiten. (2P)

(f) Berechnen Sie einen allgemeinen Ausdruck für die k-te Kumulante κ_k. (2P)

Aufgabe 5 Ottomotor (10P)

Ein Ottomotor wird durch den rechts gezeigten thermodynamischen Kreisprozess beschrieben. Dabei wollen wir annehmen, dass der Motor mit einem idealen Gas betrieben wird.



(a) Welche Art von Zustandsänderungen finden in den vier Abschnitten des Kreisprozesses statt? (2P)

(b) Bestimmen Sie für jeden Teilschritt die zugeführten und abgeführten Wärmemengen. (2P)

(c) Berechnen Sie den Wirkungsgrad in Abhängigkeit von den Temperaturen an den Eckpunkten. (2P)

(d) Welche maximale und minimale Temperatur T_{max} und T_{min} wird im Kreisprozess erreicht? (2P)

(e) Vergleichen Sie den berechneten Wirkungsgrad mit dem eines Carnot-Prozesses, der zwischen T_{max} und T_{min} betrieben wird. (2P)