# Statistische Physik & Thermodynamik

Probeklausur WS 17/18 – Prof. Dr. Haye Hinrichsen –

## Musterlösungen

*Diese Lösungsvorschläge sind für die endgültige Bewertung nicht verbindlich.*

### Aufgabe 1 Verständnisfragen (10x2 = 20 Punkte)

1. Warum ist die differentielle Wärme $đQ$ kein exaktes Differential?

   Die Wärmemenge $Q$ ist im Gegensatz zu $E$ keine Zustandsgröße, da die Systemenergie sowohl durch Zu- und Abfuhr von Wärme als auch durch das Verrichten oder Leisten von Arbeit geändert werden kann. Die aufintegrierte Wärmemenge entlang eines zyklischen Prozesses kann deshalb ungleich Null sein.

2. Welche Art von Diagrammen gibt Aufschluss über die Arbeit in einem Kreisprozess? Wie kann man erkennen, ob Arbeit vom System geleistet wird oder am System aufgewendet werden muss?

   Das $V$-$p$-Diagramm. Die Fläche unter einer nach rechts laufenden Kurve $\int p\,\mathrm{d}V$ ist gleich der vom System geleisteten Arbeit. Für einen im Uhrzeigersinn laufenden Kreisprozess ist die insgesamt geleistete Arbeit positiv. Für einen gegen den Uhrzeigersinn laufenden Kreisprozess muss dagegen insgesamt am System Arbeit geleistet werden.

3. Wie ist die kanonische Zustandssumme definiert und wie hängt sie mit der Freien Energie $F$ zusammen?

   $$Z(T,V,N) = \sum_s e^{-\beta E_s} = \sum_s e^{-E_s/k_B T} \qquad \Rightarrow \qquad F(T,V,N) = -k_B T \ln Z$$

   Die Konstante $k_B$ darf hier auch weggelassen werden.

4. Welche Aussage macht das Gibbssche Postulat?

   Das Gibbs'sche Postulat besagt, dass in einem isolierten System im Gleichgewichtszustand alle Konfigurationen (Mikrozustände) gleich wahrscheinlich sind.

5. Berechnen Sie die Legendre-Transformierte von $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

   Die Ableitung lautet $m(x) = f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Davon bildet man die Umkehrfunktion $x(m) = \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$. Die Legendretransformierte ist (bis auf Vorzeichen je nach verwendeter Definition)

   $$f^*(m) = mx(m) - f(x(m)) = -\sqrt{1-m^2}.$$

6. Was versteht man unter dem Begriff der Maxwell-Konstruktion?

   Die Maxwell-Konstruktion (nicht zu verwechseln mit der Maxwell-Relation) spielt bei Phasenübergängen eine Rolle. Ausgangspunkt ist die Kurve einer Zustandsgleichung (z.B. im $V$-$p$-Diagramm). Diese zeigt bei Phasenübergängen oft ein lokales Minimum und Maximum, in dessen Bereich der Zustand thermodynamisch instabil ist, so dass Phasentrennung eintritt. Man ersetzt die Kurve in diesem Bereich durch eine Horizontale, so dass die Kurve oberhalb und unterhalt die gleiche Fläche einschließt (auch grobe Skizzen werden hier akzeptiert). Die Position auf der Horizontalen beschreibt, sie stark jeweils beide Phasen vertreten sind.

7. Wie ist die Suszeptibilität $\chi(T)$ eines magnetischen Systems definiert? Skizzieren Sie die Suszeptibilität des Ising-Modells in der Nähe der kritischen Temperatur $T_C$.

   $\chi(T) = \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T$, wobei $M$ die Eigenmagnetisierung und $H$ das äußere Magnetfeld ist. Die Suzeptibilität divergiert von beiden Seiten kommend am kritischen Punkt.

8. Wie lautet die Van-der-Waals Zustandsgleichung und welche physikalische Bedeutung haben die darin auftretenden Konstanten $a$ und $b$?

   Die van-der-Waals-Gleichung lautet $\frac{RT}{V-Nb} - \frac{aN}{V^2}$. Es gibt viele verschiedene Formen, in der man diese Gleichung schreiben kann, aber die beiden Parameter könnnen immer wie folgt interpretiert werden: Der Parameter $a$ beschreibt eine attraktive Wechselwirkung (van-der-Waals-Wechselwirkung) zwischen den Teilchen, die druckmindernd wirkt. Der andere Parameter $b$ beschreibt das Eigenvolumen der Teilchen, was druckerhöhend wirkt.

9. Berechnen Sie die Zustandssumme $Z(\beta)$ eines quantenmechanischen harmonischen Oszillators in Kontakt mit einem Wärmebad.

   In der Lösung wird erwartet, dass die Zustandssumme korrekt angesetzt und darin die geometrische Reihe erkannt und ausgewertet wird:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega(n+\frac{1}{2})} = e^{-\beta\hbar\omega\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} [e^{-\beta\hbar\omega}]^n = \frac{e^{-\beta\hbar\omega\frac{1}{2}}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\beta\hbar\omega} - e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}}$$

10. Ein System mit zwei Konfigurationen mit den Energien $\epsilon_1 = 0$ und $\epsilon_2 = \epsilon$ befindet sich in einem Wärmebad mit der Temperatur $T$. Wie groß ist seine mittlere Energie?

    Die Besetzungswahrscheinlichkeiten sind $p_1 = 1/Z$ und $p_2 = e^{-\beta\epsilon}/Z$, wobei $Z = 1 + e^{-\beta\epsilon}$ die Zustandssumme ist. Die mittlere Energie lautet $\langle E\rangle = p_1\epsilon_1 + p_2\epsilon_2$, also

$$\langle E\rangle = \frac{\epsilon e^{-\beta\epsilon}}{1+e^{-\beta\epsilon}} = \frac{\epsilon}{e^{\beta\epsilon}+1}.$$

## Aufgabe 2 — Momente und Kumulanten (10P)

Die sogenannte *Erlang-Verteilung* ist eine kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsdichte, die durch

$$p_{n,\lambda}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

gegeben ist. Sie hängt von einem reellen Parameter $\lambda > 0$ und einem ganzzahligen Parameter $n = 1, 2, \ldots$ ab.

(a) Wie sind die momenterzeugende Funktion $M_{n,\lambda}(t)$ und die kumulantenerzeugende Funktion $K_{n,\lambda}(t)$ dieser Wahrscheinlichkeitsdichte definiert? (1P)

(b) Berechnen Sie die momenterzeugende Funktion $M_{1,\lambda}(t)$ für den Spezialfall $n = 1$ unter der Annahme, dass $t < \lambda$ ist. (1P)

(c) Finden und lösen Sie eine Rekursionsrelation $M_{n,\lambda} \to M_{n-1,\lambda}$ und lösen Sie diese, um zu zeigen, dass die momenterzeugende Funktion für $t < \lambda$ durch $M_{n,\lambda}(t) = \lambda^n/(\lambda - t)^n$ gegeben ist. (3P)

(d) Drücken Sie die Ableitung $M'_{n,\lambda}(t)$ in $M_{n+1,\lambda}(t)$ aus. (1P)

(e) Benutzen Sie (d), um einen allgemeinen Asudruck für das $k$-te Moment $m_k$ abzuleiten. (2P)

(f) Berechnen Sie einen allgemeinen Ausdruck für die $k$-te Kumulante $\kappa_k$. (2P)

## Lösungsvorschlag

(a) Die momenterzeugende und die kumulantenerzeugende Funktion sind definiert als

$$M_{n,\lambda}(t) = \langle e^{tx} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} p_{n,\lambda}(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad K_{n,\lambda}(t) = \ln M_{n,\lambda}(t)$$

(b) Das Integral lautet

$$M_{1,\lambda}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} p_{1,\lambda}(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_0^{\infty} e^{(t-\lambda)x}\,\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{t-\lambda} e^{(t-\lambda)x}\Big|_0^{\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - t}.$$

Dabei haben wir im letzten Schritt benutzt, dass $t < \lambda$ ist, so dass nur die untere Grenze beiträgt.

(c) Um die Rekusionsrelation zu erhalten, integrieren wir partiell:

$$\begin{aligned}
M_{n,\lambda}(t) &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{(t-\lambda)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\frac{\lambda^n}{(n-1)!} \cdot \frac{x^{n-1}}{t-\lambda} e^{(t-\lambda)x}\Big|_0^{\infty}}_{=0-0=0 \text{ falls } t<\lambda} - \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^{\infty} \frac{(n-2)x^{n-2}}{t-\lambda} e^{(t-\lambda)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\lambda}{\lambda - t} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} \int_0^{\infty} x^{n-2} e^{(t-\lambda)x}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{\lambda}{\lambda - t} M_{n-1,\lambda}(t)
\end{aligned}$$

Zusammen mit der Verankerung der Rekursion in Teil (b) ergibt sich sofort:

$$M_{n,\lambda}(t) \;=\; \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n$$

(d) Eine direkte Berechnung der Ableitung ergibt sofort:

$$M'_{n,\lambda}(t) = \frac{n}{\lambda} M_{n+1,\lambda}(t)$$

(e) Für die $k$-te Ableitung gilt durch wiederholte Anwendung von (d):

$$M^{(k)}_{n,\lambda}(t) = \underbrace{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}_{=(n+k-1)!/(n-1)!}\lambda^{-k} M_{n-k,\lambda}(t)$$

Wegen $M(0) = 1$ folgt daraus für die Momente

$$m_k = \frac{\partial^k M_{n,\lambda}}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,\lambda^k}$$

(f) Die kumulantenerzeugende Funktion lautet

$$K_{n,\lambda}(t) = \ln M_{n,\lambda}(t) = n\ln\lambda - n\ln(\lambda - t).$$

Die $k$-te Ableitung dieser Funktion lautet

$$K^{(k)}_{n,\lambda} = \frac{(k-1)!}{(\lambda - t)^k}.$$

Folglich sind die Kumulanten gegeben durch

$$\kappa_0 = 0\,, \quad \kappa_k = \frac{\partial^k K_{n,\lambda}(t)}{\partial t^k}\Big|_{t=0} \frac{(k-1)!}{\lambda^k}.$$

---

## Aufgabe 3 Ferromagnet (10P)

Ein Ferromagnet bestehend aus $N$ Spins kann bei tiefen Temperaturen durch die Freie Energie

$$F(T, N, h) = N\Big(\frac{a\tau}{2}M^2 + \frac{b}{4}M^4 - hM\Big)$$

approximiert werden. Dabei ist $M$ die Eigenmagnetisierung und $h$ ein von außen angelegtes Magnetfeld. $a$ und $b$ sind positive Konstanten, während $\tau = \frac{T - T_c}{T_c}$ die sogenannte reduzierte Temperatur in der Nähe der kritischen Temperatur $T_c$ ist.

(a) Skizzieren Sie $F$ als Funktion von $M$ für $T < T_c$, $T = T_c$ und $T > T_c$ bei $h = 0$. Erklären Sie anhand der Skizzen welches physikalische Phänomen für $T < T_c$ sichtbar wird. (2P)

(b) Berechnen Sie $M(T)$ für $h = 0$, indem Sie die Freie Energie minimieren. (2P)

(c) Berechnen Sie die Entropie $H(T)$ und die Wärmekapazität $C(T)$ für $h = 0$ in der ferromagnetischen Phase $T < T_c$ sowie für $T \geq T_c$. (3P)

(d) Berechnen Sie die magnetische Suszeptibilität $\chi = \left(\frac{\partial M}{\partial h}\right)_{h=0}$ sowohl unterhalb als auch oberhalb des kritischen Punkts. (2P)

(e) Skizzieren Sie die Abhängigkeit der Magnetisierung $M$ vom externen Feld $h$ in ferromagnetischen Phase und erklären Sie qualitativ, wie es zum Effekt der Hysterese kommt. (1P)

## Lösungsvorschlag

(a) Für $T < T_c$ hat die Kurve $F(M)$ zwei Minima, für $T > T_c$ dagegen nur eines. (Skizze erforderlich)
Spontane Symmetriebrechung, kurze Erklärung.

(b) Um das Minimum von $F$ als Funktion von $M$ zu bestimmen, leiten wir $F$ nach $M$ ab:

$$a\tau M + bM^3 - h = 0$$

Für $h = 0$ gibt es drei Lösungen, nämlich $M = 0$ sowie $M = \pm\sqrt{-a\tau/b}$. Die letzteren beiden sind nur physikalisch (reell) wenn $\tau < 0$, also $T < T_c$ ist. Die Lösung $M = 0$ ist nur dann ein Mininum, wenn $T \geq T_c$ ist. Die Lösung lautet also

$$M = \begin{cases} \pm\sqrt{-a\tau/b} & \text{für } T < T_c \\ 0 & \text{für } T > T_c \end{cases}$$

1P für die Lösung der Gleichung, 1P für die korrekte Fallunterscheidung

(c) Die Entropie gewinnt aus der Freien Energie durch

$$H(T) = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{N,h}.$$

In der ferromagnetischen Phase $T < T_c$ stellt sich $M$ so ein, dass $F$ minimal ist, d.h. wir müssen $M(T)$ aus dem vorherigen Aufgabenteil einsetzen und auch nach dem Argument $T$ mit differenzieren. Für $h = 0$ ist

$$F(T, N) = N\left(-\frac{a\tau}{2}\frac{a\tau}{b} + \frac{b}{4}\frac{a^2\tau^2}{b^2}\right) = -\frac{Na^2\tau^2}{4b}$$

$$\Rightarrow H(T) = -\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{Na^2 2\tau}{4b}\frac{\partial \tau}{\partial T} = \frac{Na^2(T - T_c)}{2bT_c^2}.$$

Die Wärmekapazität ist die zweite Ableitung

$$C = -T\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = +T\frac{\partial H(T)}{\partial T} = \frac{Na^2 T}{2bT_c^2}.$$

Am kritischen Punkt und in der paramagnetischen Phase $T \geq T_c$ ist dagegen nur $M = 0$ einzusetzen. In diesem Fall ist $F = 0$ und daher $H = C = 0$.
1P für das korrekte Einsetzen von $M(T)$ in $F$ und die Fallunterscheidung, 1P für $H(T)$ und 1P für $H(T)$

(d) Für $h > 0$ ergibt sich die Magnetisierung aus der Gleichung

$$a\tau M + bM^3 - h = 0.$$

Diese Gleichung differenzieren wir nach $h$:

$$\Rightarrow a\tau\frac{\partial M}{\partial h} + b3M^2\frac{\partial M}{\partial h} - 1 = 0.$$

Daraus folgt

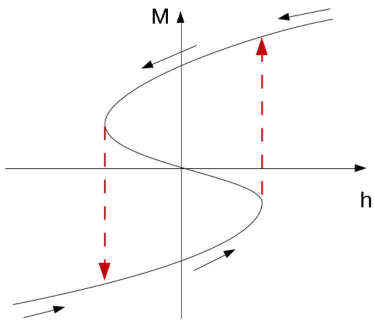
$$\chi = \left(\frac{\partial M}{\partial h}\right)_{h=0} = \left(\frac{1}{a\tau + 3bM^2}\right)_{h=0}.$$

Hier ist wiederum die Fallunterscheidung vorzunehmen, also das korrekte $M$ bei $h = 0$ einzusetzen. Man erhält

$$\chi = \begin{cases} -\frac{1}{2a\tau} & \text{für } T < T_c \\ \frac{1}{a\tau} & \text{für } T > T_c \end{cases}$$

1P für die Idee, die obige Gleichung zu differenzieren, 1P für die korrekte Rechnung mit Fallunterscheidung.

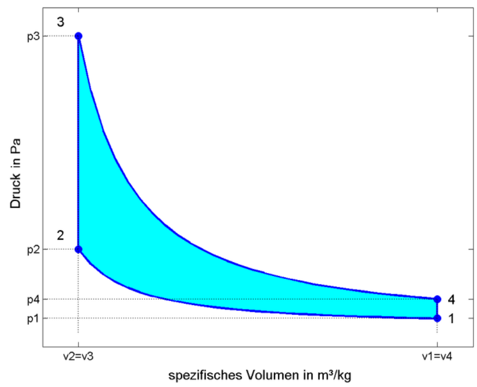
(e) So sollte das aussehen:




---

## Aufgabe 4 Ottomotor (10P)

Ein Ottomotor wird durch den rechts gezeigten thermodynamischen Kreisprozess beschrieben. Dabei wollen wir annehmen, dass der Motor mit einem idealen Gas betrieben wird.




(a) Welche Art von Zustandsänderungen finden in den vier Abschnitten des Kreisprozesses statt? (2P)

(b) Bestimmen Sie für jeden Teilschritt die zugeführten und abgeführten Wärmemengen. (2P)

(c) Berechnen Sie den Wirkungsgrad in Abhängigkeit von den Temperaturen an den Eckpunkten. (2P)

(d) Welche maximale und minimale Temperatur $T_{max}$ und $T_{min}$ wird im Kreisprozess erreicht? (2P)

(e) Vergleichen Sie den berechneten Wirkungsgrad mit dem eines Carnot-Prozesses, der zwischen $T_{max}$ und $T_{min}$ betrieben wird. (2P)

### Lösungsvorschlag

(a) 1-2 Adiabatische Kompression mit $\Delta W > 0$.
2-3 Isochore Verbrennung (Erhitzung) mit $\Delta W = 0$.
3-4 Adiabatische Expansion mit $\Delta W < 0$.
4-1 Isochore Abkühlung mit $\Delta W = 0$. (je 0.5 P)

(b) 1-2 Während der adiabatischen Kompression gilt

$$\Delta Q = 0\,, \qquad \Delta W > 0\,, \qquad \Delta W = -\int_{V_1}^{V_2} p(V)\,\mathrm{d}V\,,$$

wobei $p(V)V^\kappa = const$ und $TV^{\kappa-1} = const$ mit $\kappa = \frac{5}{3}$ gilt. Daraus folgt

$$\Delta W = -p_1 V_1^\kappa \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V^\kappa} \, \mathrm{d}V = \frac{p_1}{\kappa - 1} \left( \frac{V_1^\kappa}{V_2^{\kappa-1}} - V_1 \right) = \frac{1}{\kappa - 1} (p_2 V_2 - p_1 V_1)$$

$$\Rightarrow \ \Delta W = \frac{p_2 V_2}{\kappa - 1} \left( 1 - \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\kappa - 1} \right) > 0$$

2-3 Für die isochore Verbrennung gilt $\Delta W = 0$ mit $E = \frac{3}{2} pV$, also

$$\Delta Q = \frac{3}{2} V_2 \Delta p \ = \ \frac{3}{2} V_2 (p_3 - p_2) > 0$$

3-4 Analog zu [1-2] erhalten wir $\Delta Q = 0$ und

$$\Delta W = \frac{1}{\kappa - 1} (p_4 V_1 - p_3 V_2).$$

4-1 Analog zu [2-3] gilt $\Delta Q = \frac{3}{2} V_1 (p_1 - p_4) < 0$. Es wird also Wärme vom Motor abgegeben.

(c) Den Wirkungsgrad berechnet man wie folgt:

$$\eta_{Otto} = \frac{-\Delta W}{\Delta Q_{zu}} = \frac{V_2 (p_3 - p_2)(1 - (V_2/V_1)^{\kappa-1})}{(\kappa - 1) \frac{3}{2} (P_3 - P_2) V_2} = 1 - \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\kappa-1} = 1 - \left( \frac{T_1}{T_2} \right) = 1 - \frac{T_4}{T_3},$$

wobei wir $\kappa = \frac{5}{3}$ benutzt haben.

(d) Die minimale und maximale Temperatur lauten:

$$T_{max} = T_3, \quad T_{min} = T_1$$

(e) Bei Carnot wird der Wirkungsgrad $\eta_c = 1 - \frac{T_{max}}{T_{min}} > \eta_{Otto}$ erzielt.

---

## Aufgabe 5 — Besetzungszahlen bosonischer Gase (10P)

Betrachten Sie ein Quantengas aus identischen nicht wechselwirkenden Bosonen mit Einteilchenenergien $\epsilon_r$, das sich in Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur $T$ und mit einem Teilchenreservior mit dem chemischen Potential $\mu$ befindet.

(a) Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme $Z^{gk}$. (4P)

(b) Zeigen Sie, dass sich die mittelere Besetzungszahl $\langle n_r \rangle$ und ihre Dispersion $\langle (\Delta n_r)^2 \rangle$ mit Hilfe geeigneter partieller Ableitungen der Zustandssumme ausdrücken lassen. (2P)

(c) Berechnen Sie $\langle n_r \rangle$ und $\langle (\Delta n_r)^2 \rangle$ explizit. (2P)

(d) Welches Vorzeichen muss das chemische Potential $\mu$ für Bosegase besitzen und warum? Wie bezeichnet man die Statistik für den Spezialfall $\mu = 0$? (2P)

### Lösungsvorschlag

(a) Zunächst drücken wir die Zustandssumme durch Besetzungszahlen aus:

$$Z^{gk} = \sum_s e^{-\beta E_s - \beta\mu N_s} = \sum_{n_1,n_2,\ldots=0}^{\infty} e^{-\beta\sum_r n_r\epsilon_r - \beta\mu\sum_r n_r} = \sum_{n_1,n_2,\ldots=0}^{\infty} e^{-\beta\sum_r n_r(\epsilon_r-\mu)}$$

Man kann diese Zustandssumme umordnen und als geometrische Reihe auswerten

$$Z^{gk} = \sum_{n_1,n_2,\ldots=0}^{\infty} \prod_r e^{-\beta n_r(\epsilon_r-\mu)} = \prod_r \sum_{n_r=0}^{\infty} \left(e^{-\beta(\epsilon_r-\mu)}\right)^{n_r} = \prod_r \frac{1}{1-e^{-\beta(\epsilon_r-\mu)}}$$

und folglich

$$\ln Z^{gk} = -\sum_r \ln(1-e^{-\beta(\epsilon_r-\mu)})$$

(b) Es ist

$$\langle n_r^k\rangle = \frac{\sum_{n_1,n_2,\ldots=0}^{\infty} n_r^k\, e^{-\beta\sum_r n_r(\epsilon_r-\mu)}}{\sum_{n_1,n_2,\ldots=0}^{\infty} e^{-\beta\sum_r n_r(\epsilon_r-\mu)}} = \frac{(-\frac{1}{\beta})^k \frac{\partial^k}{\partial\epsilon_r^k} \sum_{n_1,n_2,\ldots=0}^{\infty} e^{-\beta\sum_r n_r(\epsilon_r-\mu)}}{\sum_{n_1,n_2,\ldots=0}^{\infty} e^{-\beta\sum_r n_r(\epsilon_r-\mu)}}$$

also

$$\langle n_r^k\rangle = \frac{1}{Z}(-\frac{1}{\beta})^k \frac{\partial^k}{\partial\epsilon_r^k} Z$$

insbesondere:

$$\langle n_r\rangle = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\epsilon_r}\ln Z\,, \qquad \langle(\Delta n_r)^2\rangle = \langle n_r^2\rangle - \langle n_r\rangle^2 = \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2}{\partial\epsilon_r^2}\ln Z$$

weil $(\ln Z)'' = (\frac{1}{Z}Z')' = -\frac{1}{Z^2}(Z')^2 + \frac{1}{Z}Z''$

(c) Wir setzen die Zustandssumme ein:

$$\langle n_r\rangle = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial\ln Z}{\partial\epsilon_r} = \frac{e^{-\beta(\epsilon_r-\mu)}}{1-e^{-\beta(\epsilon_r-\mu)}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_r-\mu)}-1}\,.$$

Analog ergibt sich

$$\langle(\Delta n_r)^2\rangle = \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2}{\partial\epsilon_r^2}\ln Z = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\epsilon_r}\langle n_r\rangle = \frac{1}{\beta}\frac{e^{\beta(\epsilon_r-\mu)}}{(e^{\beta(\epsilon_r-\mu)}-1)^2}\beta = \frac{e^{\beta(\epsilon_r-\mu)}}{(e^{\beta(\epsilon_r-\mu)}-1)^2}\,.$$

(d) $\mu \leq 0$ da sonst der Ausdruck für die Besetzungszahlen negativ werden würde. Bei $\mu = 0$ reduziert sich die Statistik zur sogenannten Photonenstatistik.

---