Statistische Physik & Thermodynamik

Probeklausur WS 17/18 – Prof. Dr. Haye Hinrichsen –

Zugelassene Hilfsmittel: Schreibzeug sowie ein einfacher nichtprogrammierbarer Taschenrechner. Papier wird gestellt. Erlaubt ist eine **eigenhändig verfasste handschriftliche Zusammenfassung** (max. 10 DIN A4-Seiten einseitig). Diese Zusammenfassung ist am Ende an die Klausur anzuheften und mit abzugeben. Bitte Ausweis auf den Tisch legen. **Die Benutzung elektronischer Geräte (Handys, Smartwatches,...) ist untersagt,** Geräte komplett ausschalten.

Am Ende der Klausur bitte **alle** Aufgaben (auch nicht bearbeitete) **der Reihe nach geordnet** (1,2,3,...) gefolgt von der benutzten schriftlichen Zusammenfassung zusammentackern und abgeben. Bearbeitungsdauer: 2 Zeitstunden.

Aufgabe 1 Verständnisfragen (10x2 = 20 Punkte)

1. Warum ist die differentielle Wärme $đQ$ kein exaktes Differential?
2. Welche Art von Diagrammen gibt Aufschluss über die Arbeit in einem Kreisprozess? Wie kann man erkennen, ob Arbeit vom System geleistet wird oder am System aufgewendet werden muss?
3. Wie ist die kanonische Zustandssumme definiert und wie hängt sie mit der Freien Energie F zusammen?
4. Welche Aussage macht das Gibbssche Postulat?
5. Berechnen Sie die Legendre-Transformierte von $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.
6. Was versteht man unter dem Begriff der Maxwell-Konstruktion?
7. Wie ist die Suszeptibilität $\chi(T)$ eines magnetischen Systems definiert? Skizzieren Sie die Suszeptibilität des Ising-Modells in der Nähe der kritischen Temperatur T_C.
8. Wie lautet die Van-der-Waals Zustandsgleichung und welche physikalische Bedeutung haben die darin auftretenden Konstanten a und b?
9. Berechnen Sie die Zustandssumme $Z(\beta)$ eines quantenmechanischen harmonischen Oszillators in Kontakt mit einem Wärmebad.
10. Ein System mit zwei Konfigurationen mit den Energien $\epsilon_1 = 0$ und $\epsilon_2 = \epsilon$ befindet sich in einem Wärmebad mit der Temperatur T. Wie groß ist seine mittlere Energie?

Aufgabe 2 Momente und Kumulanten (10P)

Die sogenannte *Erlang-Verteilung* ist eine kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsdichte, die durch

$$p_{n,\lambda}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

gegeben ist. Sie hängt von einem reellen Parameter $\lambda > 0$ und einem ganzzahligen Parameter $n = 1, 2, \ldots$ ab.

(a) Wie sind die momenterzeugende Funktion $M_{n,\lambda}(t)$ und die kumulantenerzeugende Funktion $K_{n,\lambda}(t)$ dieser Wahrscheinlichkeitsdichte definiert? (1P)

(b) Berechnen Sie die momenterzeugende Funktion $M_{1,\lambda}(t)$ für den Spezialfall $n = 1$ unter der Annahme, dass $t < \lambda$ ist. (1P)

(c) Finden und lösen Sie eine Rekursionsrelation $M_{n,\lambda} \to M_{n-1,\lambda}$ und lösen Sie diese, um zu zeigen, dass die momenterzeugende Funktion für $t < \lambda$ durch $M_{n,\lambda}(t) = \lambda^n/(\lambda - t)^n$ gegeben ist. (3P)

(d) Drücken Sie die Ableitung $M'_{n,\lambda}(t)$ in $M_{n+1,\lambda}(t)$ aus. (1P)

(e) Benutzen Sie (d), um einen allgemeinen Asudruck für das k-te Moment m_k abzuleiten. (2P)

(f) Berechnen Sie einen allgemeinen Ausdruck für die k-te Kumulante κ_k. (2P)

Aufgabe 3 Ferromagnet (10P)

Ein Ferromagnet bestehend aus N Spins kann bei tiefen Temperaturen durch die Freie Energie

$$F(T, N, h) = N\left(\frac{a\tau}{2}M^2 + \frac{b}{4}M^4 - hM\right)$$

approximiert werden. Dabei ist M die Eigenmagnetisierung und h ein von außen angelegtes Magnetfeld. a und b sind positive Konstanten, während $\tau = \frac{T-T_c}{T_c}$ die sogenannte reduzierte Temperatur in der Nähe der kritischen Temperatur T_c ist.

(a) Skizzieren Sie F als Funktion von M für $T < T_c$, $T = T_c$ und $T > T_c$ bei $h = 0$. Erklären Sie anhand der Skizzen welches physikalische Phänomen für $T < T_c$ sichtbar wird. (2P)

(b) Berechnen Sie $M(T)$ für $h = 0$, indem Sie die Freie Energie minimieren. (2P)

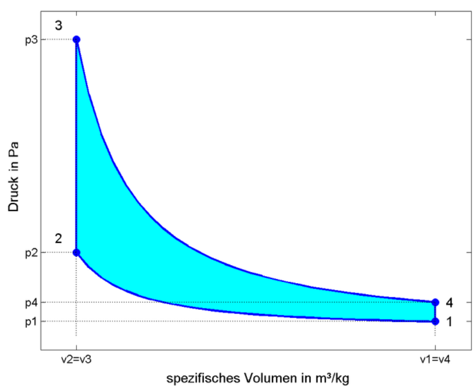
(c) Berechnen Sie die Entropie $H(T)$ und die Wärmekapazität $C(T)$ für $h = 0$ in der ferromagnetischen Phase $T < T_c$ sowie für $T \geq T_c$. (3P)

(d) Berechnen Sie die magnetische Suszeptibilität $\chi = \left(\frac{\partial M}{\partial h}\right)_{h=0}$ sowohl unterhalb als auch oberhalb des kritischen Punkts. (2P)

(e) Skizzieren Sie die Abhängigkeit der Magnetisierung M vom externen Feld h in ferromagnetischen Phase und erklären Sie qualitativ, wie es zum Effekt der Hysterese kommt. (1P)

Aufgabe 4 Ottomotor (10P)

Ein Ottomotor wird durch den rechts gezeigten thermodynamischen Kreisprozess beschrieben. Dabei wollen wir annehmen, dass der Motor mit einem idealen Gas betrieben wird.



(a) Welche Art von Zustandsänderungen finden in den vier Abschnitten des Kreisprozesses statt? (2P)

(b) Bestimmen Sie für jeden Teilschritt die zugeführten und abgeführten Wärmemengen. (2P)

(c) Berechnen Sie den Wirkungsgrad in Abhängigkeit von den Temperaturen an den Eckpunkten. (2P)

(d) Welche maximale und minimale Temperatur T_{max} und T_{min} wird im Kreisprozess erreicht? (2P)

(e) Vergleichen Sie den berechneten Wirkungsgrad mit dem eines Carnot-Prozesses, der zwischen T_{max} und T_{min} betrieben wird. (2P)

Aufgabe 5 Besetzungszahlen bosonischer Gase (10P)

Betrachten Sie ein Quantengas aus identischen nicht wechselwirkenden Bosonen mit Einteilchenenergien ϵ_r, das sich in Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T und mit einem Teilchenreservior mit dem chemischen Potential μ befindet.

(a) Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme Z^{gk}. (4P)

(b) Zeigen Sie, dass sich die mittelere Besetzungszahl $\langle n_r \rangle$ und ihre Dispersion $\langle (\Delta n_r)^2 \rangle$ mit Hilfe geeigneter partieller Ableitungen der Zustandssumme ausdrücken lassen. (2P)

(c) Berechnen Sie $\langle n_r \rangle$ und $\langle (\Delta n_r)^2 \rangle$ explizit. (2P)

(d) Welches Vorzeichen muss das chemische Potential μ für Bosegase besitzen und warum? Wie bezeichnet man die Statistik für den Spezialfall $\mu = 0$? (2P)